

平成25年度第1次募集（平成24年10月入学含む。）  
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一般入試

（専攻名）数理物質科学専攻  
（試験実施単位名）物理学コース  
（記号）A1

専門科目（物理学）

注意事項

- 1 この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は，表紙を含めて全部で8ページある。
- 3 解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。
- 5 解答時間は，180分である。
- 6 下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1] 設問 (I) と (II) にそれぞれ答えよ。

(I)

ポテンシャル  $V(x)$  のもとで  $x$  軸上を運動する質量  $m$  の質点を考える。時刻  $t$  における質点の位置を  $x(t)$  とし、 $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  とする。ポテンシャルは

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - F x$$

である。ここで、 $\omega$  と  $F$  は正の定数である。 $t = 0$  における初期条件を、 $a$  を正の定数として

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$$

と設定する。以下の問いに答えよ。

(1) 質点の運動方程式を書け。

(2) 質点のエネルギーを

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

とする。このとき、 $E$  を時間に関して微分することにより、 $E$  が時間変化しない保存量であることを示せ。

(3) 問 (1) で求めた運動方程式から、 $y(t) = x(t) - \frac{F}{m\omega^2}$  が満たすべき微分方程式を書け。さらに、得られた微分方程式を解くことにより、 $x(t)$  および  $\dot{x}(t)$  を求めよ。

(4) 問 (3) で求めた  $x(t)$  および  $\dot{x}(t)$  を用いて  $E$  を直接計算し、エネルギー保存則が成り立つことを確かめよ。

(II)

つぎに、時間に依存するポテンシャル  $V(x, t)$  のもとで  $x$  軸上を運動する質量  $m$  の質点を考える。時刻  $t$  における質点の位置を  $x(t)$  とし、 $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  とする。ポテンシャルは

$$V(x, t) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - G t x$$

である。ここで、 $\omega$  および  $G$  は正の定数である。 $t = 0$  における初期条件は、 $a$  を正の定数として

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$$

と設定する。以下の問いに答えよ。

(5) 質点の運動方程式を書け。

(6) 問 (5) で求めた運動方程式を解き、 $x(t)$  を求めよ。

## [2]

位置  $\vec{r} = (x, y, z)$ , 時刻  $t$  における電場  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  と磁束密度  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  に対するマクスウェルの方程式は, 空間の誘電率を  $\epsilon$ , 透磁率を  $\mu$  とすると以下のように書くことができる。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{i})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{ii})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) / \epsilon \quad (\text{iii})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mu \vec{i}(\vec{r}, t) \quad (\text{iv})$$

ここで  $\rho(\vec{r}, t)$  は電荷密度,  $\vec{i}(\vec{r}, t)$  は電流密度である。

(1) 式(i)–(iv)の意味を以下のように説明する。㊶–㊸に入るのに最も適した語句を下記のリストから選べ。ただし、同じ語句を複数回用いてもよい。

- ・ 式(iii)は, 電場に関する㊶の法則である。右辺の値は電場の発生源として㊶が存在することを示している。
- ・ 式(ii)は, ㊶の時間変化は㊸を生成するという㊶の法則を定式化したものである。
- ・ 式(i)の右辺の値が0なのは, 磁気㊸がないということの意味している。
- ・ 式(iv)は, ㊸によって㊶が作られるという㊶の法則を㊸の時間変動を考慮し一般化したものである。

### 語句リスト

アンペール, ガウス, オーム, ファラデーの電磁誘導,  
 ジュール, キルヒホッフ, クーロン, 電荷, 磁荷,  
 単極子, 双極子, 電場, 電流, エネルギー, 磁束密度

- (2) 電荷密度および電流密度の値が全ての $\vec{r}$ ,  $t$ に対して0の場合を考える。この空間において、電場 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ および磁束密度 $\vec{B}(\vec{r}, t)$ の満たす微分方程式が以下の形になることを式(i)–(iv)から導け。

$$-\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$-\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

必要があれば以下のベクトル演算公式を用いてよい。

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

- (3) 問(2)で導出した微分方程式の解を波数（波動）ベクトル $\vec{k}$ 、角振動数 $\omega$ 、振幅 $\vec{E}_0$ および $\vec{B}_0$ を用いて以下のように書くとする。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

このとき、 $\vec{k}$ と $\omega$ が満たす関係式を求めよ。

- (4) 問(3)で導入した電場と磁束密度の式とマクスウェル方程式(i)および(iii)を用いて電磁波が横波であることを示せ。
- (5) 問(3)で導入した電場と磁束密度の式とマクスウェル方程式(ii)または(iv)を用いて磁束密度と電場は直交していることを示せ。

[3]

量子力学における角運動量  $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$  について考える。  $L_x, L_y, L_z$  はエルミート演算子である。  $|\psi_{l,m}\rangle$  は  $\vec{L}^2$  と  $L_z$  の同時固有ベクトルであり、以下の固有値方程式を満たすとする。ここで、  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  であり、  $h$  はプランク定数である。

$$\begin{aligned} L_z |\psi_{l,m}\rangle &= m\hbar |\psi_{l,m}\rangle \\ \vec{L}^2 |\psi_{l,m}\rangle &= l(l+1)\hbar^2 |\psi_{l,m}\rangle \end{aligned}$$

固有ベクトルは、以下のように正規直交条件を満たすものとする。

$$\langle \psi_{l',m'} | \psi_{l,m} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

また、  $\vec{L}$  の  $z$  成分  $L_z$  に対する昇降演算子を、

$$L_+ = L_x + iL_y, \quad L_- = L_x - iL_y$$

と定義する。以下の問いに答えよ。

(1) 以下の関係を示せ。  $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$ ,  $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ ,  $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$  の関係を用いてよい。

(i)  $[L_{\pm}, L_z] = \mp \hbar L_{\pm}$

(ii)  $[\vec{L}^2, L_z] = 0$

(iii)  $L_{\pm} L_{\mp} = \vec{L}^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z$

(2)  $L_+ |\psi_{l,m}\rangle$  が恒等的に 0 でないとする。このとき、  $L_+ |\psi_{l,m}\rangle$  は  $L_z$  の固有ベクトルであり、その固有値が  $(m+1)\hbar$  となることを示せ。

問(2)で示されたことから、 $|\psi_{l,m}\rangle$ に昇降演算子 $L_{\pm}$ を作用させたベクトルを $|L_{\pm}\psi_{l,m}\rangle$ とし、係数 $C_{\pm}(l,m)$ を用いて以下のように表すことができる。

$$|L_{\pm}\psi_{l,m}\rangle = L_{\pm}|\psi_{l,m}\rangle = C_{\pm}(l,m)|\psi_{l,m\pm 1}\rangle$$

(3)  $\langle L_{\pm}\psi_{l,m}|L_{\pm}\psi_{l,m}\rangle = \langle\psi_{l,m}|L_{\mp}L_{\pm}|\psi_{l,m}\rangle$  を示せ。

(4)  $C_{\pm}(l,m)$ は、位相を適当に選ぶことにより、

$$C_{\pm}(l,m) = \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}$$

と表せることを示せ。

(5)  $m$ がとり得る最大値 $m_{max}$ 、および、最小値 $m_{min}$ が存在すれば、対応する固有状態に対して $L_{+}|\psi_{l,m_{max}}\rangle = 0$ 、および、 $L_{-}|\psi_{l,m_{min}}\rangle = 0$ となる。このことを用いて、 $|\psi_{l,m}\rangle$ において $m$ がとりうる値を求めよ。

## [4]

温度  $T$  の熱浴と平衡状態にある 1 個の 1 次元調和振動子について、カノニカル分布を用いて考える。この調和振動子を古典力学と量子力学でそれぞれ扱い、得られる比熱の違いについて考察しよう。必要なら以下の積分公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{c^2}\right) dx = c\sqrt{\pi}$$

また、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  であり、 $h$  はプランク定数である。

古典力学では、質量  $m$ 、角振動数  $\omega$  の 1 次元調和振動子のエネルギーは

$$E(q,p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

とかける。ここで  $p, q$  は、それぞれ位相空間での運動量と位置座標である。

- (1) 古典的な分配関数  $Z_1$  およびヘルムホルツの自由エネルギー  $F_1$  を求めよ。
- (2) 系のエントロピー  $S_1$  と比熱  $C_1$  を求めよ。

つぎに、量子力学的に 1 次元調和振動子を考えると、そのエネルギーは不連続的な値

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

であたえられる。ここで  $n$  は量子状態を区別する量子数である。

- (3) 分配関数  $Z_2$  およびヘルムホルツの自由エネルギー  $F_2$  を求めよ。
- (4) 系のエントロピー  $S_2$  と比熱  $C_2$  を求めよ。
- (5) 比熱  $C_2$  の高温極限  $k_B T \gg \hbar\omega$  での値を求め、問(2)で得られた  $C_1$  と比較せよ。
- (6) 比熱  $C_2$  の低温極限  $k_B T \ll \hbar\omega$  での近似式を求めよ。
- (7) 横軸に絶対温度  $T$  をとり、比熱  $C_2$  の概略図をかけ。