平成２６年度第１次募集（平成２５年１０月入学含む。）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

（専攻名）数理物質科学専攻

（試験実施単位名）物理学コース

（記号）A1

# 専門科目（物理学）

**注意事項**

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１８０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

新潟大学大学院自然科学研究科

[ 1 ]

次の設問（I），（II），（III）にそれぞれ答えよ。ここで $\dot{}$（ドット）は，時間 $t$ に関する微分を表す。

（I） 質点のラグランジアン $L_1$ が，次のように与えられている。

$$L_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

ここで，$m$ は質点の質量，$k$ は正の定数，$x$ は質点の一般化座標である。

(1) 質点の運動方程式を書け。

(2) 運動方程式の一般解を求めよ。

（II） 平面上で運動する質点のハミルトニアン $H_2$ が，次のように与えられている。

$$H_2 = \frac{(p_r)^2}{2m} + \frac{(p_\phi)^2}{2mr^2} - \frac{a}{r}$$

ここで，$m$ は質点の質量，$a$ は正の定数である。また，質点の一般化座標の組 $(r, \phi)$ は平面極座標を表し，$p_r$ と $p_\phi$ はそれぞれ $r$ と $\phi$ に共役な一般化運動量である。

(1) $\dot{\phi}$ と $\dot{p}_r$ をそれぞれ，$r$, $\phi$, $p_r$, $p_\phi$, $a$, $m$ のうち，必要なものを用いて表せ。

(2) 質点が半径 $R$ の円運動をおこなうとき，$R$ を $\phi$, $\dot{\phi}$, $a$, $m$ のうち，必要なものを用いて表せ。

（III） 質点のラグランジアン $L$ が，次のように与えられている。

$$L = -Mc\sqrt{\dot{Q}^2 - \dot{q}^2}$$

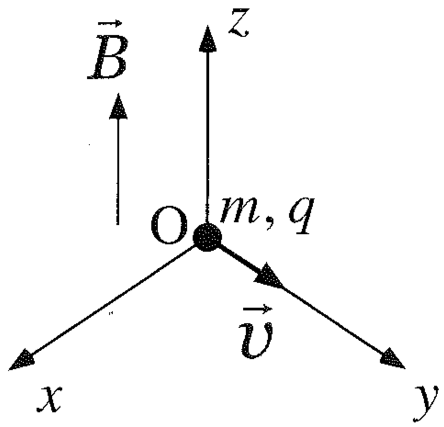
ここで，$M$ は質点の質量，$c$ は正の定数，$Q$ と $q$ は質点の一般化座標である。

(1) $Q$ に共役な一般化運動量 $P$ と $q$ に共役な一般化運動量 $p$ をそれぞれ求めよ。

(2) 質点のエネルギー $E$ は，質点のハミルトニアン $H$ と $E = H$ の関係にある。
$E$ を $\dot{Q}$, $\dot{q}$, $M$, $c$ のうち，必要なものを用いて表せ。

[ 2 ]

( I ) 図のように，真空中で $z$ 軸向きに一様な磁場 $\vec{B}=(0,0,B)$ が加わっているとする。時刻 $t=0$ のとき，原点 O に置かれた質量 $m$，電荷 $q$ の粒子に，初速度 $\vec{v}=(0,v,0)$ を与えた。$B>0$，$q>0$，$v>0$ として，以下の問いに答えよ。




(1) 粒子が磁場から受ける力の名称を答えよ。

(2) $t=0$ で粒子が受ける力 $\vec{F}$ の各成分 $F_x$, $F_y$, $F_z$ を求めよ。

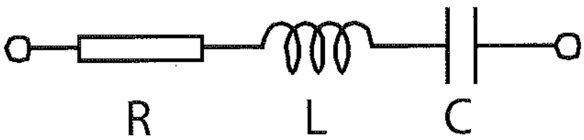
(3) 粒子が原点からもっとも遠ざかる点の座標と，最初にこの点を通るときの時刻を求めよ。

次に，上記の磁場に加えて一様な電場 $\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$ を与えた。粒子を原点 O に戻し，再び $t=0$ で初速度 $\vec{v}=(0,v,0)$ を与えた。

(4) $t=0$ で粒子が受ける力 $\vec{F}$ の各成分 $F_x$, $F_y$, $F_z$ を求めよ。

(5) この後，粒子は $y$ 軸上を一定の速度で運動した。電場の各成分 $E_x$, $E_y$, $E_z$ を求めよ。

（Ⅱ） 図のように抵抗値 $R$ の抵抗，自己インダクタンス $L$ のコイル，電気容量 $C$ のコンデンサを直列につなげた。コイルおよびコンデンサの両端に角振動数 $\omega$ の交流電圧を加えたとき，それぞれの複素インピーダンスは，虚数単位 $i$ を用いて，$i\omega L$ と $\dfrac{1}{i\omega C}$ で与えられる。以下の問いに答えよ。




(1) 図の両端に角振動数 $\omega$ の交流電圧を加えたとき，両端の間の全複素インピーダンス $Z$ を求めよ。

(2) 全複素インピーダンスの大きさ $|Z|$ を求めよ。

(3) 角振動数 $\omega$ を横軸に，全複素インピーダンスの大きさ $|Z|$ を縦軸にして，全複素インピーダンスの角振動数依存性の概略を図示せよ。なお，極値を持つ場合はその極値と，そのときの角振動数を示せ。

[ 3 ]

スピンの自由度を持つ２つの粒子が温度 $T$ の熱浴と熱平衡状態にあり，カノニカル分布に従うとする。２つの粒子はそれぞれ $S_1 = \pm 1$，$S_2 = \pm 1$ の２つのスピン状態をとりうる。各粒子には磁場がかかっており，係数 $J$ および $h$ を用いてハミルトニアンは次のように与えられるとする。

$$H = JS_1S_2 - h(S_1 + S_2)$$

このとき，２つの粒子は $(S_1, S_2) = (1,1)$，$(1,-1)$，$(-1,1)$，$(-1,-1)$ の４つの状態をとることができ，それぞれのエネルギーは $E = J - 2h$，$-J$，$-J$，$J + 2h$ で与えられる。以下では物理量 $A$ の統計力学的な期待値を $\langle A \rangle$ と表す。ボルツマン定数を $k_{\mathrm{B}}$ とし，以下の問いに答えよ。

(1) 分配関数 $Z$ を求めよ。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー $F$ を求めよ。

(3) エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を求めよ。

(4) スピンの和の期待値 $M = \langle S_1 + S_2 \rangle$ を用いて以下のように定義される磁化率 $\chi$ を求めよ。

$$\chi = \lim_{h \to 0} \frac{M}{h}$$

(5) $J > 0$ と $J < 0$ のそれぞれの場合について，磁化率の温度依存性の概形を図示せよ。

(6) スピンの相関関数 $\langle S_1S_2 \rangle$ を求めよ。

[ 4 ]

ハミルトニアンが次式で与えられる一次元調和振動子を考える。

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\ell}{\hbar}\widehat{p}\right)^2 + \left(\frac{\widehat{x}}{\ell}\right)^2\right]\hbar\omega \,.$$

ここで，$\hbar$ はプランク定数，$\omega$ は振動子の角振動数であり，また，$\ell$ は正の定数である。このとき，昇降演算子（消滅演算子および生成演算子）$\widehat{a}$ および $\widehat{a}^\dagger$ を次式に従って導入する。

$$\frac{\widehat{x}}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger\right) \,, \qquad \frac{\ell}{\hbar}\widehat{p} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\widehat{a} - \widehat{a}^\dagger\right) \,.$$

このとき，量子化条件 $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar$ より交換関係 $\left[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger\right] = 1$ が成り立つことに注意して，以下の問いに答えよ。

(1) $\widehat{H}$ が質量 $m$ の振動子のハミルトニアンと一致するよう定数 $\ell$ を決定せよ。

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\widehat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\widehat{x}^2 \,.$$

また，$\hbar\omega$ および $\ell$ の次元を答えよ。

(2) ハミルトニアン $\widehat{H}$ を演算子 $\widehat{N} = \widehat{a}^\dagger\widehat{a}$ を用いて表せ。
(交換関係より $\widehat{a}\widehat{a}^\dagger = \widehat{a}^\dagger\widehat{a} + 1$ が成り立つことに注意せよ。)

(3) 演算子 $\widehat{N} = \widehat{a}^\dagger\widehat{a}$ の固有値を $n$ とし，(規格化された) 固有状態を $|n\rangle$ と書くと，

$$\widehat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \,, \qquad (\, n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

である。このことを用いて，第 $n$ 励起状態のエネルギー固有値 $\varepsilon_n$ および隣り合うエネルギー準位の間隔 $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ を答えよ。

(4) 演算子 $\widehat{N} = \widehat{a}^\dagger\widehat{a}$ と消滅演算子 $\widehat{a}$ の交換関係 $\left[\widehat{N}, \widehat{a}\right]$ を計算せよ。また，その結果を用いて，状態 $\widehat{a}\,|n\rangle$ が固有値 $n-1$ の固有状態 $|n-1\rangle$ に比例することを示せ。

(5) $\widehat{a}\,|n\rangle$ は固有値 $n-1$ の固有状態 $|n-1\rangle$ に比例するので，比例定数 $A_n$ を用いて，$\widehat{a}\,|n\rangle = A_n\,|n-1\rangle$ と書ける。同様に，比例定数 $B_n$ を用いて，$\widehat{a}^\dagger\,|n\rangle = B_n\,|n+1\rangle$ と書ける。このとき，次の関係が成り立つことを示せ。

$$|A_n|^2 = n \,, \qquad |B_n|^2 = n + 1 \,.$$

ただし，状態 $|n\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ はすべて規格化されているものとする。

この調和振動子系に微小な定数$\lambda$に比例する摂動を加えた。このときのハミルトニアンは次式で与えられる。

$$\widehat{H}' = \widehat{H} + \lambda \widehat{V}\ , \qquad \widehat{V} = \frac{\widehat{x}}{\ell}\hbar\omega\ .$$

一般に摂動論によると，$n$番目のエネルギー固有値$\varepsilon_n$に対する一次の摂動$\delta\varepsilon_n^{(1)}$および二次の摂動$\delta\varepsilon_n^{(2)}$は，それぞれ次の公式で与えられる。

$$\delta\varepsilon_n^{(1)} = \lambda \langle n|\widehat{V}|n\rangle\ , \qquad \delta\varepsilon_n^{(2)} = \lambda^2 \sum_{n'(\neq n)} \frac{\left|\langle n'|\widehat{V}|n\rangle\right|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'}}\ .$$

ただし，和は$n$と異なるすべての$n'$についてとる。以下，これらの公式を上記の調和振動子系に適用して，エネルギー準位のシフトを求めよう。

(6) 摂動の演算子$\widehat{V}$を昇降演算子$\widehat{a}$および$\widehat{a}^\dagger$を用いて表せ。また，一次の摂動エネルギー$\delta\varepsilon_n^{(1)}$はいくらか。

(7) $n$番目のエネルギー固有値$\varepsilon_n$に対する二次の摂動公式において，$\langle n'|\widehat{V}|n\rangle$がゼロにならない$n'$の値をすべて答えよ。また，そのそれぞれに対して，$\left|\langle n'|\widehat{V}|n\rangle\right|^2$の値を答えよ。

(8) 二次の摂動エネルギー$\delta\varepsilon_n^{(2)}$を計算せよ。