

平成26年度第2次募集（平成26年10月入学含む。）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一般入試

数理物質科学専攻

物理学

A1

専門科目（物理学）

注意事項

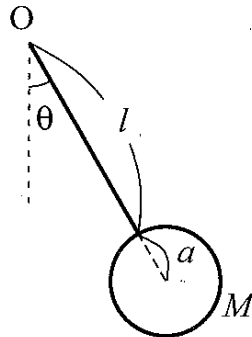
- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は、全部で5ページある（表紙は含まない）。
- 3 解答は、すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。
- 5 解答時間は、180分である。
- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。

[1]

質量 M の剛体の任意の軸のまわりの慣性モーメント I は、その軸と剛体の質量中心との距離を h 、剛体の質量中心を通りその軸に平行な軸のまわりの慣性モーメントを I_G とすると、次の式で表される。

$$I = I_G + Mh^2$$

図のように、質量の無視できる長さ l の棒に、半径 a 、質量 M の円板を取り付けた振り子を考える。棒の一端を原点 O とし、円板の中心は棒の延長線上にある。振り子は円板と平行な面内を振動し、棒と鉛直線のなす角度を θ とする。重力加速度の大きさを g とし、以下の問いに答えよ。



- (1) この円板の、円板に垂直で円の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントが $I_G = \frac{Ma^2}{2}$ となることを示せ。
- (2) 原点 O のまわりの振り子の慣性モーメント I_0 を求めよ。
- (3) 振り子が上図のような位置にあるとき、この振り子に働く重力について、原点のまわりの力のモーメントの大きさと向きを求めよ。
- (4) θ についての運動方程式を書け。

以下では、角度 θ が十分小さく、 $\sin \theta \approx \theta$ と近似できるとする。

- (5) 時刻 $t = 0$ に $\theta = \theta_0$ で振り子を静かに離した。振り子の運動方程式を解け。
- (6) この振り子の周期 T を求めよ。
- (7) 長さ $l + a$ の糸に質量 m の質点を取り付けた単振り子に比べて、この振り子の周期は何倍になっているか。

[2]

次の設問 (I) と (II) にそれぞれ答えよ。真空の誘電率を ϵ_0 , 真空の透磁率を μ_0 , 位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$, 時間を t とする。

(I) ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r}) = a\vec{r}$ がある。ここで, a は正定数である。

- (1) ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ の発散 $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{r})$, および回転 $\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})$ をそれぞれ求めよ。
- (2) ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ を真空中の電場ベクトルと見なすとき, 電荷体積密度 $\rho(\vec{r})$ を求めよ。
- (3) ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ を真空中の磁束密度ベクトルと見なすことはできない。その理由を述べよ。

(II) 電荷も電流もない真空中では, 電場ベクトル $\vec{E}(\vec{r}, t)$ と磁束密度ベクトル $\vec{B}(\vec{r}, t)$ について, 次の方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \text{(ii)} \quad \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \end{cases}$$

いま, 電場ベクトル $\vec{E}(\vec{r}, t)$ と磁束密度ベクトル $\vec{B}(\vec{r}, t)$ の各成分がそれぞれ, 次のように与えられている。

$$\begin{cases} E_x(\vec{r}, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_y(\vec{r}, t) = 0 \\ E_z(\vec{r}, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_x(\vec{r}, t) = 0 \\ B_y(\vec{r}, t) = B_0 \cos(kz - \omega t) \\ B_z(\vec{r}, t) = 0 \end{cases}$$

ここで, E_0 , k , および ω は正定数, B_0 は実定数である。

- (1) 与えられた電場ベクトル $\vec{E}(\vec{r}, t)$ と磁束密度ベクトル $\vec{B}(\vec{r}, t)$ の組は, z 方向へ伝わる電磁波を表す。この電磁波が伝わる速さ c を, k と ω を用いて表せ。
- (2) 方程式 (i) の x 成分, および方程式 (ii) の y 成分をそれぞれ, B_0 , E_0 , k , t , z , ω , ϵ_0 , μ_0 のうち必要なものを用いて書け。
- (3) c と B_0 をそれぞれ, E_0 , ϵ_0 , μ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

[3]

(I) 量子化された一次元調和振動子 N 個が温度 T の熱平衡状態にある。

i 番目 ($i = 1, \dots, N$) の振動子の角振動数を ω_i とすると、基底状態を基準に測ったエネルギーは

$$E = \sum_{i=1}^N E_i, \quad E_i = n_i \hbar \omega_i, \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられる。ここで、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ であり、 h はプランク定数である。ボルツマン定数を k として、以下の問いに答えよ。なお、解答には $\beta = \frac{1}{kT}$ を用いてよい。

- (1) この調和振動子系の分配関数 $Z_N(\beta)$ を計算せよ。
- (2) この調和振動子系の全エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を計算せよ。また、 i 番目の振動子のエネルギーの期待値 $\langle E_i \rangle$ を答えよ。
- (3) この調和振動子系の全エネルギーの揺らぎ ΔE を計算せよ。また、 i 番目の振動子のエネルギーの揺らぎ ΔE_i が次式を満たすことを示せ。

$$(\Delta E_i)^2 = \hbar \omega_i \langle E_i \rangle + \langle E_i \rangle^2$$

(II) 体積 V の箱の中に気体分子 N 個が入れている。いま箱の中に固定された微小領域 (体積 v) をとる。気体分子は古典統計に従うとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 微小領域に気体分子一個が入る確率 $p = \frac{v}{V}$ を用いて、微小領域に気体分子 n 個が入る確率 P_n を表せ。
- (2) 気体の数密度 $\rho = \frac{N}{V}$ を一定に保って $N \rightarrow \infty$ の極限を考えることにより、

$$P_n = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \quad a = \rho v$$

となることを示せ。必要なら次の公式を用いてよい。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x.$$

- (3) 微小領域に入る気体分子の個数の期待値 $\langle n \rangle$ およびその分散 $(\Delta n)^2$ を求め、 $(\Delta n)^2$ を $\langle n \rangle$ で表せ。

[4]

ポテンシャル $V(x)$ のもとで一次元的な運動をする質量 m の粒子が量子力学的なエネルギー固有状態にあるとする。エネルギー固有値を E とすると、粒子の波動関数 $\psi(x)$ は以下のような時間によらないシュレディンガー方程式に従う。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

ここで、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ であり、 h はプランク定数である。以下では $E > 0$ の解を考えることにする。

(I) まず、以下のような階段型ポテンシャルを考える。ただし、 V_0 は正の定数であるとする。

$$V(x) = -V_0 \quad (x < 0)$$

$$V(x) = 0 \quad (x > 0)$$

x の負の領域から正の向きに進む粒子が壁で反射される場合、波動関数は以下のように書ける。

$$\psi(x) = e^{ikx} + A e^{-ikx} \quad (x < 0)$$

$$\psi(x) = B e^{ik'x} \quad (x > 0)$$

ここで、 $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)}$ 、 $k' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ で、 A と B は定数である。なお、以下の問いでは、解答に k および k' を用いてもよい。

(1) 波動関数の接続条件から A および B を求めよ。

(2) $x < 0$ および $x > 0$ のそれぞれの領域における確率の流れ $J(x)$ を求めよ。ただし、 $J(x)$ は以下のように定義される。

$$J(x) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^*(x) \frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{d\psi^*(x)}{dx} \psi(x) \right]$$

(3) 反射率および透過率を求めよ。

(Ⅱ) 次に、以下のようなデルタ関数型のポテンシャルを考える。

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m} \Omega \delta(x)$$

ここで、 $\delta(x)$ はデルタ関数であり、 Ω は正の定数であるとする。前問と同様に x の負の領域から正の向きに進む粒子を考えると、波動関数は以下のように書ける。

$$\psi(x) = e^{ipx} + C e^{-ipx} \quad (x < 0)$$

$$\psi(x) = D e^{ipx} \quad (x > 0)$$

ここで、 $p = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ で、 C と D は定数である。なお、以下の問いでは、解答に p を用いてもよい。

- (1) この場合はポテンシャルが有界でないので、波動関数の微係数 $\psi'(x)$ は $x = 0$ において連続でない。波動関数の接続条件の一つとして、以下の式が成り立つことを示せ。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \psi'(x) - \lim_{x \rightarrow -0} \psi'(x) = 2\Omega \psi(0)$$

- (2) 波動関数の接続条件から C および D を求めよ。
- (3) 反射率および透過率を求めよ。