平成２７年度第２次募集

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

数理物質科学専攻

物理学

Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で８ページある。

3　解答用紙は，全部で４枚ある。

4　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

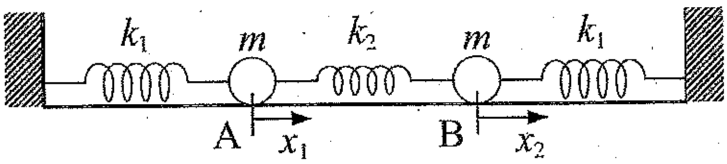
5　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

6　解答時間は，１８０分である。

7　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

図のように滑らかな面上に質量 m の小物体 A と B が三本のばねにつながって置かれている。両側のばねの端が壁に取り付けられている。両側のばねのばね定数は k_1 で，中央のばねのばね定数は k_2 であり，平衡状態ではすべてのばねが自然長である。二つの小物体はそれぞれの平衡位置の周りを，ばねに沿った一直線上を振動するものとする。図のように小物体 A および B の平衡位置からの変位をそれぞれ x_1，x_2 とする。平衡位置にあるときのこの系のポテンシャルエネルギーを 0 とし，ばねの質量は無視できるとして，以下の問いに答えよ。



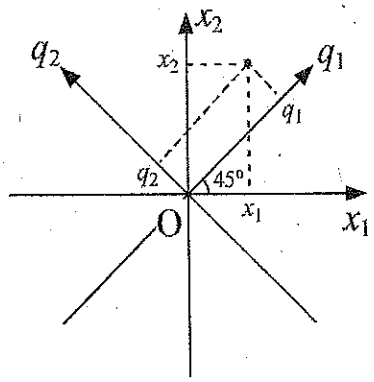
(1) 変位 x_1，x_2 を用いてこの系のポテンシャルエネルギー U を書け。

(2) この系のラグランジアン L を書け。

(3) この時の小物体 A および B に対するラグランジュの運動方程式を書け。

(4) この運動方程式から x_1 および x_2 についての連立微分方程式を求めよ。

次に図のように，x_1 を横軸に x_2 を縦軸にとり，これを 45° 回転した座標 q_1，q_2 を考える。



(5) x_1 および x_2 を q_1 および q_2 を用いて表せ。

(6) 問 (4) で求めた連立微分方程式を q_1 および q_2 についての微分方程式に書き換えよ。

(7) この微分方程式の一般解を求めよ。

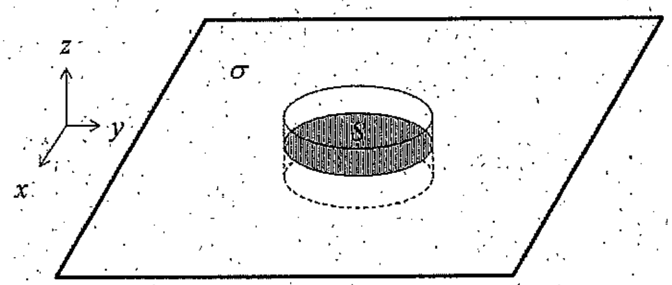
[2]

(Ⅰ) 厚さの薄い導体でできた無限に広い平板が，真空中で xy 平面上に置かれている。真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。

最初，この平板上に電荷が面密度 σ で一様に分布しているとする。

(1) 平板上の電荷がつくる電場を求める。図のように平板に垂直な底面積 S の円柱状の閉曲面に対して，ガウスの法則を適用することにより，平板から距離 z の点における電場の大きさを求めよ。

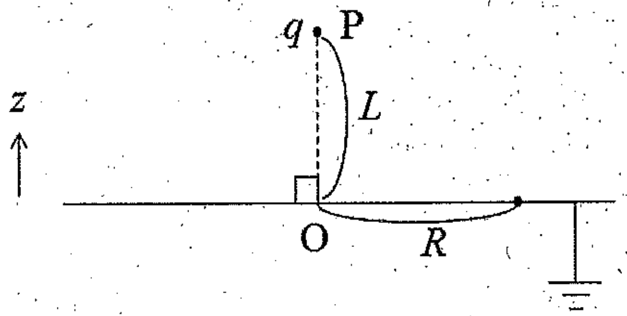
(2) 平板から離れた位置における電位 $\phi(z)$ を求めよ。ここで平板上の点，つまり $z=0$ における電位を 0 とせよ。



次に下図のように，この平板を接地して面から距離 L だけ離れた点 P に電荷 $q\ (>0)$ を置いた。

(3) この電荷が平板から受ける力の大きさを求めよ(平板の電位が 0 であることを利用して，鏡像法を用いることができる)。

(4) 平板の表面上 $(z=0)$ に生じる電場の大きさを，点 P から平板表面に下した垂線の交わる点 O からの距離 R の関数として求めよ。



(Ⅱ) 単位長さ当たりの巻数n, 半径Rの無限に長いソレノイドに電流Iが流れている場合，ソレノイド内部には磁束密度の大きさが$B = \mu_0 nI$の一様な磁場が生じることが分かっている。真空の透磁率をμ_0として以下の問いに答えよ。

(1) ソレノイド内部に，中心軸に垂直な半径r ($r < R$) の円がある。この円の内側を貫く磁束を求めよ。

ソレノイドの中心軸をz軸とした円柱座標(r, φ, z)をとり，φの正の方向に電流を流す。$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$を与えるベクトルポテンシャル$\vec{A}$は，この系の対称性から以下のようなものを考えればよい。

・$\vec{A}$の大きさはzとφによらない
・$\vec{A}$のφ方向以外の成分は0である

このことから，以下ではベクトルポテンシャルを$\vec{A}(\vec{r}) = A_\varphi(r)\vec{e}_\varphi$と表す ($\vec{e}_\varphi$は$\varphi$方向の単位ベクトルである)。

(2) z軸に垂直で，z軸上に中心がある半径r ($r < R$) の円の内側を貫く磁束$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$を，ストークスの定理を適用することにより，$A_\varphi(r)$を用いて表せ。ここで$S$は，この円を周囲とする任意の曲面であり，$\vec{n}$は$S$上の単位法線ベクトルである。

(3) 問(1)と問(2)の結果を比較することにより，$r < R$における$A_\varphi(r)$を求めよ。

(4) このソレノイドの外部では磁束密度は0であることが分かっている。$r = R$における$A_\varphi(r)$の接続条件を考慮し，ソレノイド外部($r > R$)における$A_\varphi(r)$を求めよ。

[3]

N 個の独立な原子からなる系がある。各原子は，基底状態と励起状態の二つの量子状態をとることができるとし，それぞれの状態のエネルギー値は，$-\epsilon$ および ϵ ($\epsilon > 0$) である。粒子数 N は十分大きく，必要があれば次の関係式を用いてよい。

$$\log N! \simeq N \log N - N \qquad \text{(Stirling の公式)}$$

(1) 全エネルギーが $E = M\epsilon$ ($M = -N, \cdots, N$) である状態の状態数 W_M を求めよ。すなわち，N 個の原子が，励起状態に N_+ 個と基底状態に $N_-(= N - N_+)$ 個に配分される場合の数を計算すればよい。ただし，$M = N_+ - N_-$ である。

(2) ボルツマン定数を k として統計力学的エントロピー S を求め，これを励起状態にある原子数の比 $x = N_+/N$ の関数として表せ。

(3) 横軸に x をとり，この系のエントロピー S の概略図をかけ。

(4) 温度の定義から，この系の温度 T を求め，これを x の関数として表せ。

(5) 横軸に x をとり，この系の温度 T の概略図をかけ。また，T が負となる x の範囲を求めよ。

[4]

(Ⅰ) 角運動量演算子$\hat{\boldsymbol{l}}$とそのx, y, z方向の成分$\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$, $\hat{l}_z$について，次の交換関係が成り立つ。

$$[\hat{l}_y, \hat{l}_z] = -\frac{\hbar}{i}\hat{l}_x,\ \ [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = -\frac{\hbar}{i}\hat{l}_y,\ \ [\hat{l}_x, \hat{l}_y] = -\frac{\hbar}{i}\hat{l}_z$$

以下のように$\hat{l}_+$, $\hat{l}_-$を定義する。

$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y,\ \ \hat{l}_- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y$$

次の式を計算し，それぞれ可換かどうか答えよ。

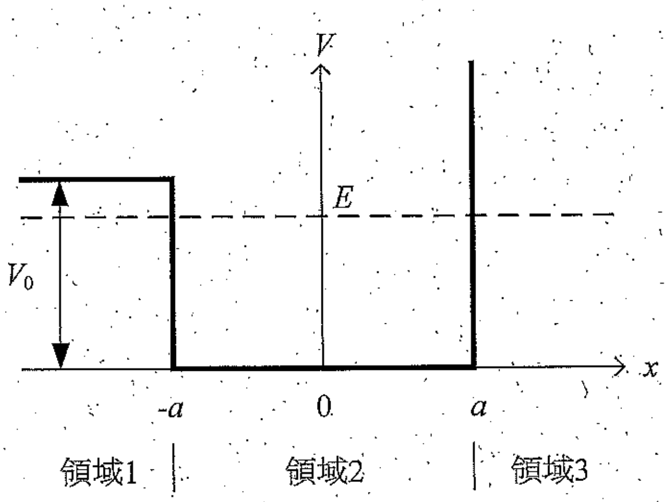
(1) $[\hat{l}_+, \hat{l}_+]$

(2) $[\hat{l}_+, \hat{l}_-]$

(3) $[\hat{\boldsymbol{l}}^2, \hat{l}_z]$

(Ⅱ)　一次元空間における質量 m とエネルギー E を持つ自由粒子の運動を量子力学的に考える。図に示すように，以下のようなポテンシャル $V(x)$ 中に粒子が存在している。ただし $E < V_0$ とする。

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x < -a) \quad \cdots \text{領域 1} \\ 0 & (-a \le x \le a) \quad \cdots \text{領域 2} \\ \infty & (x > a) \quad \cdots \text{領域 3} \end{cases}$$



(1) 領域 1 のシュレーディンガー方程式を書け。
(2) 領域 1 の波動関数の一般解を求めよ。
(3) 領域 2 のシュレーディンガー方程式を書け。
(4) 領域 2 の波動関数の一般解を求めよ。
(5) $x = -a$ と $x = a$ における境界条件を示せ。
(6) $x = -a$ と $x = -2a$ の位置で粒子を見いだす確率の比を求めよ。
(7) エネルギー E が次の式を満たすことを示せ。

$$\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}} = -\tan\left(\frac{2a\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)$$