平成２９年度第１次募集（平成２８年１０月入学含む）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

数理物質科学専攻

物理学

Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で９ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１８０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

質量 m の質点が，一端を点 O に固定された長さ R のひもでつながれている。ひもは緩むことはなく，質点には重力 mg が鉛直下向きに働いているとする。g は重力加速度である。鉛直下向きの軸を z 軸，ひもと z 軸のなす角を θ，z 軸まわりの回転角を ϕ とした 3 次元極座標を用いて，質点の運動を考える。3 次元直交座標 (x, y, z) とは次のような関係にあるとする。

$$x = R\cos\phi\sin\theta, \quad y = R\sin\phi\sin\theta, \quad z = R\cos\theta, \quad (0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi)$$

ただし，この問題では R は変化せず，位置を表わす変数は θ と ϕ だけである。

(1) 速度 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$ を極座標の変数 (θ, ϕ) とその時間に関する微分を用いて表せ。

(2) 質点の運動エネルギーは，極座標を用いて，

$$T = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$$

であることを示せ。

(3) 質点の位置エネルギーを，極座標を用いて表せ。ただし，質点が最下点 $(\theta = 0)$ にあるときの位置エネルギーをゼロとする。

(4) この系のラグランジアンを書け。

(5) θ と ϕ についての運動方程式をそれぞれ求めよ。

(6) θ，ϕ に共役な運動量 p_θ，p_ϕ をそれぞれ求めよ。また，p_ϕ が保存することを示せ。

(7) この系のハミルトニアンを求めよ。ただし，変数は $\theta, \phi, p_\theta, p_\phi$ のうち必要なものを用いよ。

(8) $p_\phi = \beta$ （定数）とおき，θ についての運動方程式が

$$mR^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}(\theta)}{\partial\theta}$$

となるような，有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(\theta)$ を求めよ。

(9) 質点を z 軸まわりに回転させ，z 軸とひもの角度 θ が θ_0 のまま一定で，質点の運動が円運動になるようにした。そのときの角速度 $\dot{\phi}$ を求めよ。

(10) その円運動の周期を求めよ。

[2]

(I) 静磁場におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (A_x, A_y, A_z)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対してガウスの法則 $\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が $\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$ の条件の下で, 微分方程式 $-\nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ を満たすことを示せ。ここで, $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ は電流密度, μ_0 は真空の透磁率である。

(3) (2) の方程式の一般解が $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \dfrac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV'$ となることを用いて, 電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ に対するビオ-サバールの法則の一般形 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \dfrac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dV'$ を示せ。

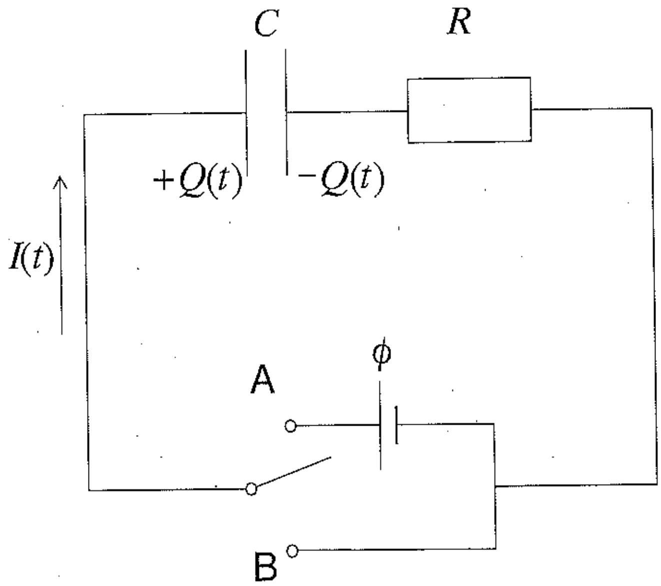
以下に示すベクトルポテンシャルの一般解を用いて, 十分に長い区間を流れる直線電流が作る磁束密度について考える。

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{i}(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx' dy' dz'$$

(4) 強さ I の定常電流が z 軸上を流れているとき, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の 3 成分が, それぞれ $A_x = A_y = 0$, $A_z = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \log\left(\dfrac{4L^2}{x^2 + y^2} + 1\right)$ となることを示せ。ただし, z' に関する積分区間は $z - L$ から $z + L$ までとし, L は x, y の絶対値に比べて十分大きいとする。

(5) (4) で求めたベクトルポテンシャルから磁束密度 $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ の 3 成分 B_x, B_y, B_z をそれぞれ求めよ。

(II) 静電容量 C のコンデンサー，抵抗値 R の抵抗およびスイッチと起電力 ϕ の直流電源を図のように接続し，時刻 $t=0$ のときスイッチを A に入れた。以下の問いに答えよ。



(1) ϕ とコンデンサーに蓄えられた電荷 $Q(t)$ の間に成り立つ関係式を示せ。

(2) 回路に流れる電流 $I(t)$ を求めよ。ただし，$t=0$ のときコンデンサーに電荷は蓄えられていないものとする。

(3) 次に，$t=t_1$ でスイッチを B に切り替えた。$t=0$ 以降の $I(t)$ と t との関係を図示せよ。ただし t_1 は RC に比べて十分大きいものとする。

[3]

大きさ μ の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ を持った粒子 N 個からなる系が温度 T の熱浴と平衡状態にある。ここで，磁気モーメント間の相互作用はないものとする。磁場 $\boldsymbol{H}$ がない時はそれぞれの磁気モーメントは三次元空間でバラバラな方向を向いており，互いに打ち消し合いマクロな磁化 $\boldsymbol{M}$ はゼロである。一様な静磁場中では，磁場と磁気モーメントのなす角を θ とすると，以下のような一粒子のハミルトニアンで表されるゼーマン相互作用によって，磁場方向に有限の磁化を示す。

$$\mathcal{H} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{H} = -\mu H \cos\theta$$

磁場は z 軸に平行であるとし，ボルツマン定数を k_{B}，$\langle A \rangle$ を物理量 A の期待値であるとして，以下の問いに答えよ。

(1) 1 粒子の分配関数 Z が次の式で表されることを示せ。

$$Z = 4\pi \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\mu H} \sinh\left(\frac{\mu H}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

ここで，

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

である。

(2) N 粒子系のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

(3) 磁場に平行な磁化 $M_z = N\langle \mu\cos\theta \rangle$ を求めよ。

(4) 次の式で定義される磁化率 χ を求めよ。

$$\chi = \lim_{H\to 0} \frac{M_z}{H}$$

必要であれば，以下の近似式を用いよ。$x \ll 1$ のとき，

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$$

(5) 磁場に垂直な x 方向の磁化 M_x はどうなっているか，M_x の期待値を求めることにより，説明せよ。

(6) 磁気モーメントの大きさ μ がボーア磁子 μ_{B} であるとき，0.1 K の低温において 10 T の磁場を印加すると，低温強磁場条件 $(\mu H/k_{\mathrm{B}}T \gg 1)$ を満たしている。この条件下における 1 mol あたりの磁化の大きさ M_z を，有効数字 2 桁で計算せよ。必要であれば，以下の定数を用いよ。$\mu_{\mathrm{B}} = 9.27\times10^{-24}$ J/T, $k_{\mathrm{B}} = 1.38\times10^{-23}$ J/K, アボガドロ数 $N_{\mathrm{A}} = 6.02\times10^{23}$。

[4]

一次元空間において，以下のポテンシャルのもとで束縛されている質量 m とエネルギー E を持つ粒子の運動を考える。

$$V = \begin{cases} 0 & (x < -a) & \text{領域 I} \\ -V_0 & (-a \leq x \leq a) & \text{領域 II} \\ 0 & (x > a) & \text{領域 III} \end{cases}$$

なお，$V_0 > 0$ および $a > 0$ とする。

(1) 波動関数を $u(x)$ として，領域 II における時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

(2) (1) の方程式の一般解を，$k > 0$ として，$u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ とおく。k を E を用いて表せ。

(3) 波動関数を $u(x)$ として，領域 I および III における時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

(4) (3) の方程式の一般解を，$k' > 0$ として，$u(x) = Ce^{k'x} + De^{-k'x}$ とおく。k' を E を用いて表せ。

(5) 波動関数 $u(x)$ が $|x| \to \infty$ で発散しないことを考慮して，領域 I および III での一般解をそれぞれ書け。

(6) 領域 I, II, III での波動関数を $u_{\mathrm{I}}(x)$, $u_{\mathrm{II}}(x)$, $u_{\mathrm{III}}(x)$ として，境界条件を示せ。

ポテンシャルが $x = 0$ に対し対称であるので，シュレーディンガー方程式の解は偶関数もしくは奇関数となる。

(7) 偶関数の場合について，領域 I, II, III での一般解を書け。また k と k' との間の関係式を求めよ。

(8) (2) と (4) の結果から k と k' との間の関係式を求めよ。

(9) (7) および (8) で求めた関係式を，$X = ka$ と $Y = k'a$ として XY グラフ上に表せ。また，k と k' が 1 組だけ解を持つ条件を求めよ。

(10) (9) で k と k' が 1 組だけ解を持つ場合の波動関数 $u(x)$ の概形をグラフで表せ。