平成２０年度第１次募集新潟大学大学院自然科学研究科
博士前期課程入学者選抜試験問題

（専攻名）自然構造科学専攻
（試験実施単位名）　Ａ１

専門科目

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で6ページある。（表紙は含まない。）

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，180分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1] 以下の設問 A, B に答えよ。

A.

質量 m の粒子が，中心対称ポテンシャル $V(r)$ の中を運動している。ここで r は，中心から粒子までの距離を表す。いま，粒子のエネルギーを $E=\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$，ポテンシャルを $V(r)=\frac{\hbar^2 U(r)}{2m}$ とおくと，この粒子に対するシュレーディンガー方程式は，

$$\left(\Delta - U(r) + k^2\right)\psi(r) = 0, \tag{1.1}$$

と書ける。ここで，ラプラシアン Δ は，角運動量演算子 $\widehat{L}$ を用いて，

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\widehat{L}^2}{\hbar^2}\right), \tag{1.2}$$

である。ポテンシャルは半径 a の井戸型で，

$$U(r) = \begin{cases} 0, & (r \le a) \\ U_0, & (r > a) \end{cases} \tag{1.3}$$

であるとする。$U_0 > k^2 > 0,\ k > 0$ として次の問 (1)~(5) に答えよ。

(1) 軌道角運動量 ℓ の状態の波動関数を，球面調和関数 $Y_{\ell\mu}(\theta,\phi)$ を用いて $\psi(r) = R_\ell(r) Y_{\ell\mu}(\theta,\phi)$ と書いたとき，$\widehat{L}^2 Y_{\ell\mu}(\theta,\phi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell\mu}(\theta,\phi)$ となることを用いて，動径波動関数 $R_\ell(r)$ の満たす方程式を (1.1) 式より導け。

問 (2)~(5) では，軌道角運動量 $\ell = 0$ の状態について答えよ。

(2) $u(r) = rR_0(r)$ とおき，$r \le a$ と $r > a$ の領域における $u(r)$ に対するシュレーディンガー方程式を書け。また，$r = 0$ と $r = \infty$ における境界条件を考慮して，$u(r)$ について解け。

(3) 問 (2) で得られた解から，$r = a$ における波動関数の接続条件を考えることにより，k を決める式（エネルギー固有値を決める式）を求めよ。

(4) 束縛状態がただ 1 つ存在するための，U_0 に対する条件を求めよ。

(5) このポテンシャルが無限に高い（$U_0 \to \infty$）場合のエネルギー固有値を求めよ。

B.

スピン $\frac{1}{2}$ の電子が，中心対称ポテンシャルの中を運動している。次の問 (1)，(2) に答えよ。

(1) 電子が，軌道角運動量が ℓ （$\ell \neq 0$）の状態にいるとき，とり得る全角運動量（軌道角運動量とスピンを合成したもの）をすべてあげよ。答えのみでよい。

(2) 電子が２個，互いに相互作用をせずに，ともに $\ell = 0$ の状態に束縛されているとする。次の (a), (b) に答えよ。

(a) この２電子系のスピン波動関数は，２電子のスピン座標の交換の下でどのような対称性（対称，反対称など）を持つか，理由をつけて答えよ。

(b) この２電子系の全スピンはいくらか。

[2]

一辺 L の立方体の箱に質量 m の単原子分子からなる古典理想気体が閉じ込められている。この系をカノニカルアンサンブルを用いて考えよう。なお必要ならば，問題文の最後にあるガウス積分の公式およびスターリングの公式を用いてよい。

(1) 以下の文章中の空欄 $\boxed{\text{(a)}}$ ～ $\boxed{\text{(d)}}$ を埋めよ。

一辺 L の周期境界条件を課した箱に閉じ込められた理想気体1分子のシュレーディンガー方程式の解は

$$\psi(x,y,z) = A\exp(i\frac{p_x}{\hbar}x)\exp(i\frac{p_y}{\hbar}y)\exp(i\frac{p_z}{\hbar}z)$$

で与えられ，対応するエネルギーは $\boxed{\text{(a)}}$ となる。ただし，A は規格化定数である。周期境界条件の下で波動関数は $\psi(x+\boxed{\text{(b)}},y,z)=\psi(x,y,z)$ を満たすので，運動量 p_x は整数 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ を用いて $p_x=\boxed{\text{(c)}}\times n$ と量子化される。p_y，p_z についても同様である。つまり，固有状態は運動量空間中の格子間隔 $\boxed{\text{(c)}}$ の格子点上に分布していることになる。したがって，運動量空間の微小な体積 $\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z$ あたりに分布している固有状態の数は，$\boxed{\text{(d)}}\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z$ となる。$\boxed{\text{(d)}}$ を実空間の微小な体積 $\Delta x\Delta y\Delta z$ あたりの状態の数に換算すると，位相空間での微小な体積 $\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z\Delta x\Delta y\Delta z$ あたり，

$$\frac{\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z\Delta x\Delta y\Delta z}{(2\pi\hbar)^3}$$

の状態が分布していることがわかる。

(2) 単原子分子理想気体1分子の分配関数が

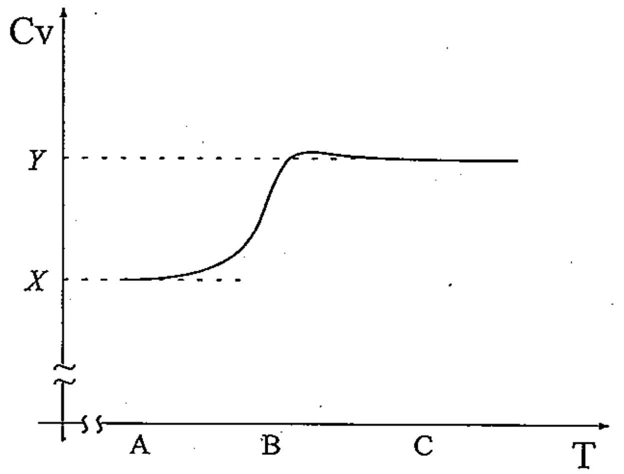
$$V\left(\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

となることを示せ。ここで，k_{B} はボルツマン定数，$V=L^3$，T は温度である。

(3) 理想気体の個々の分子は区別できないということに注意し，N 分子からなる単原子分子理想気体に対する，ヘルムホルツの自由エネルギーおよびエネルギーの期待値を求めよ。

(4) 単原子分子理想気体 N 分子に対する，エントロピーおよび定積比熱を求めよ。

次に，N 分子からなる空気程度の分子量を持つ2原子分子理想気体に対し，低温から高温までの定積比熱の温度変化を調べると，概略が図のようになった。なお，図の横軸は対数目盛である。



(5) 図中の X は (4) で求めた単原子分子理想気体の定積比熱に相当する。Y はいくらになるか答えよ。また，室温 (300K 程度) は，横軸の A，B，C のうちどの温度領域に相当するか答えよ。

(6) 2原子分子理想気体の比熱のグラフの概形がこのような形になる理由を，A，B，C の各温度領域での違いに注意して，定性的に説明せよ。

ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad (a > 0)$$

スターリングの公式

$$\log N! \simeq N \log N - N, \qquad (N \gg 1)$$

［3］以下の実験に関する問A，Bに答えよ。

A. 図1のような抵抗とコンデンサからなる回路を考える。$\boxed{\text{(a)}}$から$\boxed{\text{(g)}}$の空欄を埋める適切な語句等を下の語群より選べ。また，$\boxed{\text{(ア)}}$から$\boxed{\text{(ウ)}}$に入る数値を答えよ。ab間に入力として正弦波状に時間変化する電圧V_{in}を印加した際の，cd間の出力電圧V_{out}の周波数依存性を測定した。V_{in}に対するV_{out}の比（利得）をデシベル(dB)単位で，位相差をラジアン単位で表したものが図2である。ここで電圧比$V_{\mathrm{out}}/V_{\mathrm{in}}$のデシベル換算は，$\boxed{\text{(a)}}$によって求められる。利得曲線から，$\boxed{\text{(b)}}$周波数領域では，出力が低下していることがわかる。この特性から，このような回路を$\boxed{\text{(c)}}$フィルタと呼ぶ。入力に対して，出力が3dB降下した角周波数は$\boxed{\text{(ア)}}$ $\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$であり，これを周波数で表せば有効数字を2桁として$\boxed{\text{(イ)}}$kHzである。この周波数は$\boxed{\text{(d)}}$周波数と呼ばれる。この時，抵抗が100 Ωであれば，コンデンサの容量は$\boxed{\text{(ウ)}}$ μFとなる。位相差曲線を見ると，$\boxed{\text{(d)}}$周波数よりも十分高い領域では位相が$\boxed{\text{(e)}}$だけ遅れていることがわかる。これは入力信号に対し，出力信号が$\boxed{\text{(f)}}$されていることを意味している。この特性から，この回路は$\boxed{\text{(f)}}$回路ともよばれ，$\boxed{\text{(d)}}$周波数よりも$\boxed{\text{(g)}}$周波数領域で動作する。

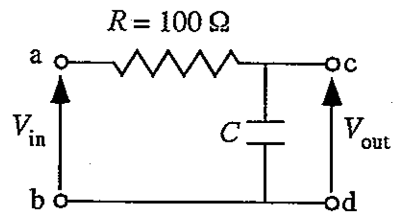


図1

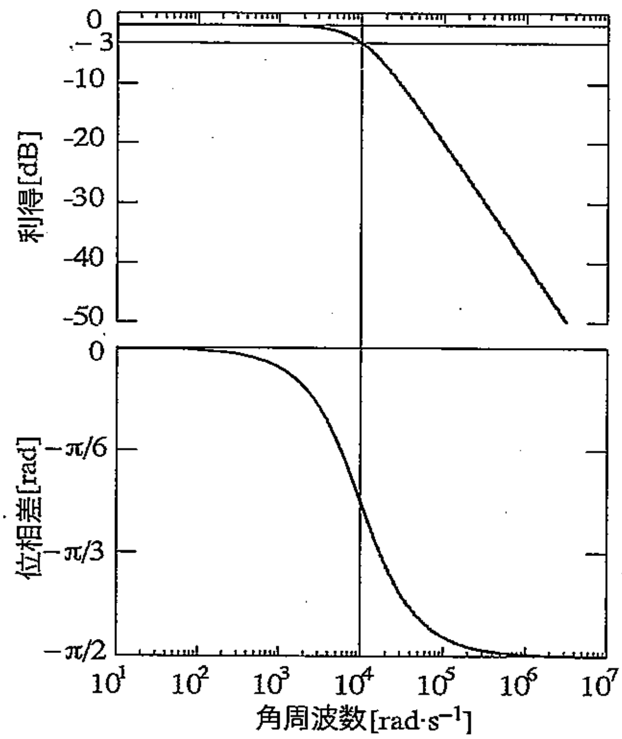


図2

語群

$10\log_{10}(V_{\mathrm{out}}/V_{\mathrm{in}})$，$20\log_{10}(V_{\mathrm{out}}/V_{\mathrm{in}})$，$100 \times V_{\mathrm{out}}/V_{\mathrm{in}}$，$10^{V_{\mathrm{out}}/V_{\mathrm{in}}}$，$2\pi$，$\pi$，$\pi/2$，0，
低い，高い，低域遮断（ハイパス），高域遮断（ローパス），帯域通過（バンドパス），帯域阻止（ノッチ），発振，遮断（カットオフ），規格，特異，下限，上限，減衰，積分，微分，対数，増幅，発振，帯域，インピーダンス

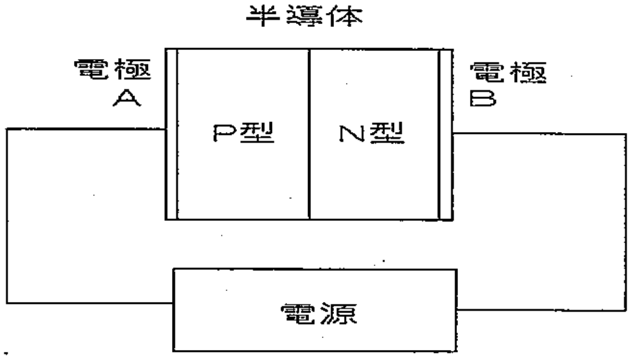
B．次の問いに答えよ。

（1）金属，半導体，絶縁体の導電率の違いを，これらの物質中の電子のエネルギー準位に着目して，説明せよ。

（2）半導体のアクセプター準位およびドナー準位について説明せよ。

（3）Ｐ型，Ｎ型のシリコン結晶を用いて，ＰＮ接合ダイオードの構造をした半導体放射線センサーを作り，図３のように直流定電圧電源につないだ。この半導体放射線センサーにバイアス電圧をかけて，空乏層を作りたい。どのように電圧をかければ良いか説明せよ。また，そのときの図３に対応する回路図を回路図記号を用いて書け。回路図は電極ＡおよびＢの位置が分かるように書くこと。

図３



（4）図３の半導体放射線センサーの電極ＡＢ間にバイアス電圧 1500 V を印加したところ，空乏層が最大になり，その厚さは 1.5 mm であった。このとき，センサーに放射線が入射し，電荷（$-q$）相当の電子が発生した。この電子のドリフト速度はいくらか。また，この電子が最大空乏層を横切るのに要する時間はいくらか。ただし，シリコン中の電子の移動度 μ を 1500 $cm^2\ s^{-1}\ V^{-1}$ とする。