平成２１年度第１次募集（平成２０年１０月入学含む。）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　選　抜

自然構造科学専攻

A1　物理学

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で４ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

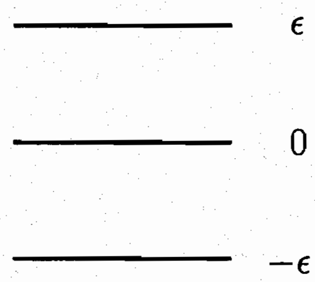
4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１２０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

図のように，エネルギーが $-\epsilon$, 0, ϵ の３つの状態をとる系が，温度 T の熱浴に接して熱平衡状態にある。ボルツマン定数を k とし，カノニカル分布を用いて，以下の問いに答えよ。



図： 系のとりうる３状態（エネルギー：$-\epsilon$, 0, ϵ）

(1) エネルギーが $-\epsilon$, 0, ϵ の状態にある確率をそれぞれ P_-, P_0, P_+ とすると，${P_0}^2 = P_- P_+$ の関係を満たすことを示せ。

(2) この系のエネルギーの平均値 $\langle E \rangle$，および，エネルギーの２乗の平均値 $\langle E^2 \rangle$ を，T と ϵ の関数としてそれぞれ求めよ。

(3) この系の比熱 C を，T と ϵ の関数として求めよ。

(4) 問 (2)，(3) の結果から，エネルギーの揺らぎの大きさ $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$ と比熱 C の間に，$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = kT^2 C$ の関係が成り立つことを示せ。

(5) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F，および，エントロピー S を，T と ϵ の関数として求めよ。

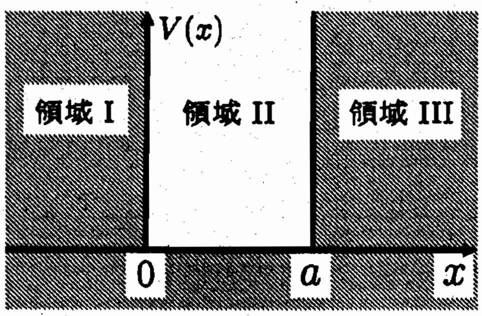
(6) 低温極限（$T \to 0$），および，高温極限（$T \to \infty$）におけるエントロピー S の値は，それぞれいくらか。また，S を T の関数として表すグラフの概略を描け。

[2]

図のような1次元井戸型ポテンシャル中を運動する質量 m の粒子の量子力学を考える。ポテンシャルは a を正の実数として

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (\text{領域 I:} \quad x \leq 0) \\ 0 & (\text{領域 II:} \quad 0 < x < a) \\ +\infty & (\text{領域 III:} \quad x \geq a) \end{cases},$$

とする。領域 I と III における粒子の波動関数を零として，以下の問いに答えよ。ただし，i を虚数単位とし，h をプランク定数として $\hbar = h/(2\pi)$ とする。



(1) 粒子のエネルギーを $E > 0$，波動関数を $\psi(x)$ として，領域 II における時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

(2) 境界条件 $\psi(0) = \psi(a) = 0$ のもと，問 (1) で得られた方程式を解き，粒子のエネルギーが

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad (n \text{ は正の整数}),$$

で与えられることを示せ。また，E_n に対応する波動関数が領域 II において

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

で与えられることを示せ。ここで，波動関数の規格化因子は正の実数とした。

(3) 基底状態 $(n = 1)$ を考えた時，粒子を見出す確率密度が最大となる位置を求めよ。

(4) エネルギー E_n の状態に対して，運動量演算子 $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx}$ の期待値が $\langle \hat{p} \rangle = 0$ となること，および $\hat{p}^2$ の期待値が $\langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar^2 \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$ となることを示せ。

(5) エネルギー E_n の状態に対して，位置演算子 $\hat{x} = x$ の期待値が $\langle \hat{x} \rangle = a/2$ となること，および $\hat{x}^2$ の期待値が $\langle \hat{x}^2 \rangle = \dfrac{a^2}{3} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{n\pi}\right)^2$ となることを示せ。なお，必要ならば以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^A t \sin^2 t \, dt = \frac{A^2}{4} + \frac{1-\cos(2A)}{8} - \frac{A\sin(2A)}{4}.$$

$$\int_0^A t^2 \sin^2 t \, dt = \frac{A^3}{6} - \frac{A\cos(2A)}{4} + \frac{(1-2A^2)\sin(2A)}{8}.$$

(6) 問 (4) と (5) の結果を用いて，運動量の不確定さ $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$，および位置の不確定さ $\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ を求めよ。また，Δp と Δx は不確定性関係を満たすことを示せ。