平成２２年度第１次募集（平成２１年１０月入学を含む。）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　選　抜

自然構造科学専攻

A1　物理学

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で４ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１２０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

1次元ポテンシャル $V(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ の中を運動している質量 m の粒子の量子力学を考える。ポテンシャルは井戸型であり，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$（h はプランク定数）を用いて $V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}U(x)$ と書くと，$U_0 > 0$，$a > 0$ として

$$U(x) = \begin{cases} 0, & (-a \leq x \leq a) \\ U_0, & (x > a,\ x < -a) \end{cases}$$

である。粒子のエネルギーを $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ と表し，ここでは束縛状態について考えるため $0 \leq k < \sqrt{U_0}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) この粒子の波動関数 $\psi(x)$ に対する時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。ただし，答えは $U(x)$ と k を用いて表すこと。

(2) $\psi(x)$ が，問 (1) のシュレーディンガー方程式の解であるとき，$\psi(-x)$ もまた，同じエネルギーを持つ解であることを示せ。

問 (2) の結果より，この粒子のエネルギー固有状態は定まった偶奇性（パリティ）を持つ。以下の問 (3)~(6) ではこのことを利用する。

(3) 波動関数が偶関数の場合 $(\psi(x) = \psi(-x))$ と奇関数の場合 $(\psi(x) = -\psi(-x))$ について，束縛状態を記述するシュレーディンガー方程式の解を，k と U_0 を用いて，$x \geq 0$ の領域で書け。

(4) 波動関数が偶関数と奇関数のそれぞれの場合について，$x = a$ における波動関数の接続条件を考えることにより，k を決める式（エネルギー固有値を決める式）を求めよ。

(5) U_0 の値により束縛状態の数がどう変わるかを求めよ。

(6) 井戸が無限に深い場合（$U_0 \to +\infty$）のエネルギー準位をすべて求めよ。

(7) 今，スピン $\frac{1}{2}$ のフェルミ粒子が２個，互いに相互作用をせずに，上記のポテンシャル $V(x)$ の中を運動しているとする。次の問 (a), (b), (c) に答えよ。

   (a) この２粒子系が取り得る全スピン S の値をすべて書け。

   (b) この２粒子系のスピン波動関数は，全スピン S の値により，スピン座標の交換の下でどのような対称性（対称，反対称など）を持つか答えよ。

   (c) ２粒子がともに基底状態にいるとき，この２粒子系の全スピン S はいくらか。理由をつけて答えよ。

[2]

図1のように，2 つの系 A, B が粒子を自由に通す壁で接触している。これらの系には合わせて N 個の粒子が入っており，温度 T で熱平衡状態にある。A 系ならびに B 系のそれぞれには N 個の格子点が存在し，粒子はそれらの格子点上にのみ位置する。また，各格子点に粒子は高々 1 個しか入らない。A 系で 1 粒子がもつエネルギーは 0 であり，他方，B 系での 1 粒子のエネルギーは $\varepsilon(>0)$ であるとする。その結果，絶対零度($T=0$)では，N 個の粒子はすべて A 系にあり，温度 T が上がると，いくつかの粒子は B 系へ移動する。粒子間の相互作用は無視できるとして，次の問いに答えよ。

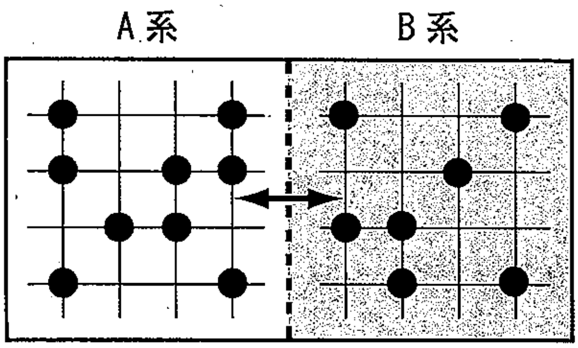

図 1

(1) カノニカル分布を使ってこれらの系を考えよう。

(1-1) n 個の粒子が B 系に存在し，それに応じて $N-n$ 個の粒子が A 系にある部分平衡状態を考える。このときの全系（A 系と B 系を合わせた系）に対する熱力学的重率（実現可能な微視的状態の総数）$W(n)$ を求めよ。

(1-2) ボルツマン定数を k_B として，問(1-1)の部分平衡状態に対する全系のエントロピー $S(n)$ を求めよ。ただし，$N>n\gg 1,\ N-n\gg 1$ を仮定し，大きな整数 m に対して成り立つスターリングの公式，$\log m! \simeq m\log m - m$ を利用せよ。

(1-3) 問(1-1)の部分平衡状態に対する全系のエネルギー $E(n)$ を求めよ。

(1-4) 自由エネルギー $F(n)=E(n)-TS(n)$ を最小化することにより，熱平衡状態にある B 系での平均粒子数 $\langle n\rangle$ を温度 T の関数として求めよ。

(2) これらの系にグランドカノニカル分布を適用することもできる。各格子点を 1 つの部分系とみなせば，その部分系では化学ポテンシャルμの粒子浴と接して粒子数がゆらいでいるとみなせる。例えば，B 系における 1 つの格子点について，可能な微視的状態とそれに対応する粒子数$N_{\rm b}$およびエネルギー（粒子浴のエネルギーを含む）$E_{\rm b}$は，図２のようになる。

$N_b = 0$　　　　$N_b = 1$

$E_b = 0$　　　　$E_b = \varepsilon - \mu$

図２

(2-1) B 系における 1 つの格子点の部分系に対する大分配関数$\Xi_{\rm b}$を求めよ。

(2-2) B 系における 1 つの格子点の平均粒子数$\langle N_{\rm b} \rangle$を求めよ。

(2-3) 同様に，A 系における 1 つの格子点の部分系について，その大分配関数$\Xi_{\rm a}$と平均粒子数$\langle N_{\rm a} \rangle$を求めよ。

(2-4) 両系に対して得られた平均粒子総数の和 $N \times (\langle N_{\rm a} \rangle + \langle N_{\rm b} \rangle)$は，全系の粒子総数 N に等しい。この条件を使って化学ポテンシャルμを決定せよ。なお，得られたμを問(2-2)の結果に代入すれば，問(1-4)の結果が再現される。