平成２４年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物　理　学　科

筆記試験問題（物理学）

注意事項

１．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

２．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
　問題冊子１部，解答用紙３枚

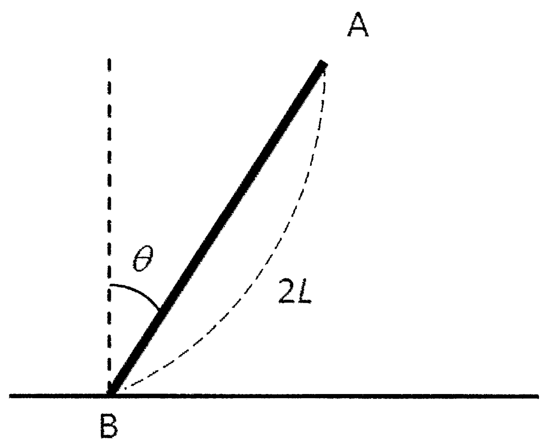
３．問題は全部で３題あります。各解答用紙に受験番号を記入
　してください。

４．解答時間は１２０分です。途中で退席することはできません。

５．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

図のように，長さ $2L$，質量 M の一様な棒の端 B が水平な床の上に置かれている。運動を始める前の端 B を原点として，水平右向きに x 座標，鉛直上向きに y 座標をとり，棒が鉛直方向となす角度を θ とする。棒が角度 $\theta = \alpha$ で静止した状態から運動を始める場合について，以下の問いに答えよ。ただし，変数の時間微分を $dx/dt = \dot{x}$，$d^2x/dt^2 = \ddot{x}$ のように表す。また，重力加速度を g とし，棒の太さは無視できるものとする。



1. この棒に垂直で重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

まず，床が粗くすべらない場合を考える。このとき棒は，端 B を中心として回転しながら倒れる。

2. このとき，棒が端 B を中心として回転するときの慣性モーメントを求めよ。
3. エネルギー保存則より，棒の傾きが $\theta\,(>\alpha)$ のときの棒の角速度 $\dot{\theta}$ を求めよ。

次に，床が完全になめらかな場合を考える。このとき棒は，端Bがすべりながら倒れる。

4. 端 B で床から棒に働く抗力を R として，棒の重心の水平方向と鉛直方向に対する運動方程式を，$\ddot{x}$ および $\ddot{y}$ を用いて書け。
5. 端 B で床から棒に働く抗力を R として，棒の重心まわりの回転運動に対する運動方程式を書け。
6. 棒の重心の y 座標を θ を用いて表せ。また，エネルギー保存則より，棒の重心まわりの角速度 $\dot{\theta}$ を $\theta\,(>\alpha)$ の関数として求めよ。
7. 棒のもう一方の端Aが床につく瞬間における棒の重心まわりの角速度を求めよ。
8. 端Aが床につく瞬間における端Aの速度を水平方向および鉛直方向についてそれぞれ求めよ。

II.

1. 以下の問いに答えよ。ただし円周率を π，真空の透磁率を μ_0 とする。

   a. 大きさ I の電流を，長さ l，半径 a の円柱 A の軸方向に一様に流す。この円柱 A の内部の透磁率は μ である。この円柱の中心軸からの距離を x として，円柱の内外に生じる磁束密度の大きさを求めよ。ただし $l \gg a, x$ とする。

   b. 円柱 A と，円柱 A と同じ形状の円柱 B を，中心軸の間の距離を r として平行に置いた。この状態で円柱 A と B に，大きさ I の電流を互いに逆向きに流した。円柱 A と B の中心軸を含んだ平面上において，二本の円柱の間の点の磁束密度の大きさを，円柱 A の中心軸からの距離 x $(a < x < r - a)$ の関数として求めよ。ただし，$l \gg r > 2a$ とする。

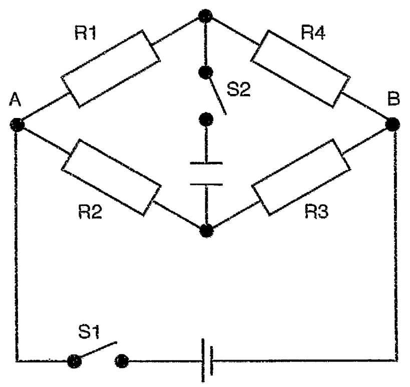
   c. 円柱 A と B の両端を導線でつないで回路が作られた時の，自己インダクタンスを求めよ。ただし，導線を含む円柱の両端の影響と，円柱 A，B 内の磁場の影響は無視できるものとする。

2. 図に示したような抵抗，コンデンサ，スイッチ，直流電源からなる回路がある。抵抗 R1，R2，R3，R4 の抵抗値をそれぞれ r_1，r_2，r_3，r_4，コンデンサの容量を C，直流電源の電圧を E としたとき，以下の問いに答えよ。

   a. スイッチ S1 および S2 を開放しているとき，AB 間の合成抵抗を求めよ。

   b. スイッチ S1 を閉じた後に S2 を閉じた。十分に時間が経過したとき，コンデンサに蓄えられたエネルギーはいくらか。

   c. スイッチ S1，S2 を閉じたときにコンデンサに蓄えられるエネルギーを最小にする条件を r_1，r_2，r_3，r_4 を用いて表せ。



3. 銅の電気抵抗率は 0°C において，1.55 $\mu\Omega \cdot$ cm である。長さ 1.00 m，断面が直径 2.00 mm の円である銅線の 0°C における電気抵抗を求めよ。

III.

1. 3次元空間の位置ベクトルを $\vec{r}=(x,y,z)$，その大きさを $r=|\vec{r}|$ で表す。r のみに依存する静電ポテンシャル $\phi(r)$ と位置 $\vec{r}$ におけるベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ について以下の問いに答えよ。

   a. 電場 $\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\phi(r)$ を，$\phi'(r)=\dfrac{d\phi(r)}{dr}$ を用いてできるだけ簡単に表せ。

   b. $\phi(r)$ がラプラス方程式 $\Delta\phi(r)=0$ を満たすとき，$\phi(r)$ を求めよ。

   c. ベクトルポテンシャルが，定数ベクトル $\vec{m}$ を用いて $\vec{A}(\vec{r})=\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ であたえられているとき，このベクトルポテンシャルによる磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})=\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r})$ を求めよ。必要ならば，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して成立する関係式 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ を用いよ。

2. 物理学において，行列の対角化の問題がよく現れる。α をゼロでない実数，行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   として以下の問いに答えよ。

   a. 行列 A の固有値をすべて求めよ。

   b. a. で求めた各固有値に対する規格直交化された固有ベクトルの完全系を求めよ。

   c. 適当な実直交行列 R を用いて，行列 A を

$$A=R\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}{}^tR$$

   の形に表せ。ここで，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は適当な定数，${}^tR$ は行列 R の転置行列を表す。

3. 速さに比例する抵抗を受けながら落下する物体の，下向きの速さ $v(t)$ の時間変化は，微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = g - bv$$

で表される。ここに，g, b は正の定数である。初期条件 $v(0) = 0$ のもとに，この微分方程式を解け。