

平成 30 年度

新潟大学理学部第 3 年次編入学試験

物 理 学 科

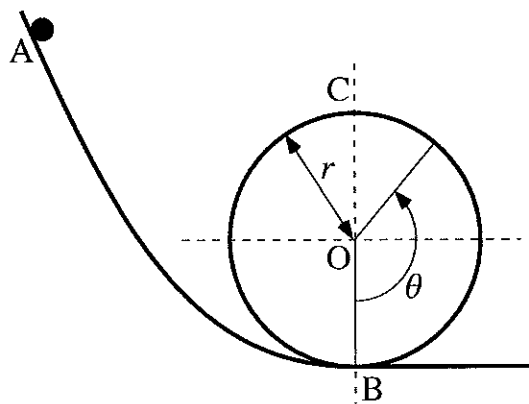
筆記試験問題（物理学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。  
問題冊子 1 部， 解答用紙 3 枚
3. 問題は全部で 3 題あります。各解答用紙に受験番号を記入してください。
4. 解答時間は， 1 2 0 分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後， 問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

1. 水平方向に  $x$  軸，鉛直上方向に  $y$  軸をとる。原点から仰角  $\theta$  の方向に初速  $v$  で打ち上げた質点の軌跡を表す式を求めよ。重力加速度の大きさを  $g$  とする。
2. 図のように半径  $r$  の円状のループを持つなめらかなレールがある。点 A に置かれた質量  $m$  の質点が，レールの斜面に沿って静かに滑り出し，点 B を速さ  $v_B$  で通過する。ループの中心を O，頂点を C とし，OB から測った角度を  $\theta$  とする。重力加速度の大きさを  $g$  として以下の問いに答えよ。
  - a. 質点がループ上の角度  $\theta$  の位置にきたときの速さを  $v$ ，そのとき質点がレールから受ける垂直抗力の大きさを  $N$  とする。質点の運動方程式の動径方向成分を書け。
  - b. 質点がループ上にあるとき，地面からの高さを  $y$ ，質点の速さを  $v$  として，質点がループから受ける垂直抗力の大きさを求めよ。
  - c. 点 B における速さが  $v_B \leq v_1$  のとき質点はループ上で逆戻りをする。  $v_1$  を求めよ。
  - d. 質点が点 C を通過しループを一周するためには  $v_B \geq v_2$  である必要がある。  $v_2$  を求めよ。
  - e.  $v_B \geq v_2$  のための，点 A の高さについての条件を示せ。
  - f.  $v_1 < v_B < v_2$  のとき，質点は角度  $\theta_3$  でレールを外れた。このときの  $\cos \theta_3$  と質点の速さを  $v_B$ ，  $r$ ，  $g$  を用いて表せ。
  - g. 問 f のあと，質点はどのような運動をするか，簡潔に述べよ。



図

## II.

1. 以下の問いに答えよ。ただし、真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

- 面積  $S$  の 2 枚の極板を真空中で距離  $d$  だけ隔てた平行板コンデンサーの両極に、それぞれ  $+Q$ ,  $-Q$  の電荷を与えた。極板間に生じる電場の強さ  $E$  および極板間の電位差  $V$  を求めよ。ただし、極板の端での電場の乱れは無視でき、極板間の電場は一様とみなせるものとする。
- 周波数  $f$  の交流電流  $I(t) = I_0 \sin(2\pi ft)$  を、抵抗値  $R$  の抵抗に流したときの仕事率  $P$  を求め、1 周期の間の平均仕事率  $\bar{P}$  を計算せよ。
- 座標軸の原点  $O$  に、大きさが  $p$ , 向きが  $z$  軸の正方向である電気双極子モーメントがある。このとき、原点から距離  $r$  だけ離れた点  $R(x, y, z)$  における電位は、

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3}$$

で与えられる。この電気双極子モーメントによる電場  $\vec{E}(x, y, z)$  を求めよ。

- 磁場  $\vec{B}(\vec{r})$  はベクトル・ポテンシャル  $\vec{A}(\vec{r})$  を用いて  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$  と表される。ストークスの定理を用いて、磁場中で閉じた経路  $C$  に沿った  $\vec{A}(\vec{r})$  の線積分を  $\vec{B}(\vec{r})$  を含んだ式へ書き換えよ。また、その式が物理的に何を表しているかを簡潔に説明せよ。
2. 電荷  $q$ , 質量  $m$  の粒子が、一様な磁場  $\vec{B}$  のもとで運動する場合について調べる。磁場を  $z$  軸方向  $\vec{B} = (0, 0, B)$  にとり、粒子の速度を  $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$  とする。以下の問いに答えよ。
- 粒子が受けるローレンツ力  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  を求めよ。
  - $x$  方向と  $y$  方向のそれぞれについて粒子の運動方程式を書け。
  - 時刻  $t = 0$  に初速  $v_0$  で粒子が入射した。この入射した点を原点  $O$  とし、入射方向を  $y$  軸正の向きとする。このとき、時刻  $t$  における粒子の速度について  $v_x, v_y$  をそれぞれ求めよ。
  - 時刻  $t$  における粒子の  $xy$  平面内の座標  $(x, y)$  を求めよ。また、粒子の軌跡を図示せよ。

## III.

1. ベクトル場  $\vec{V}(\vec{r}) = \frac{A\vec{r}}{r^3}$  が存在する。ここで  $A$  は定数であり,  $\vec{r} = (x, y, z)$  で,  $r = |\vec{r}|$  である。  $r \neq 0$  として以下のものを計算せよ。計算過程も書くこと。
  - a.  $\text{div } \vec{V}(\vec{r})$
  - b.  $\text{rot } \vec{V}(\vec{r})$
  
2. 原点を中心として球対称な密度分布  $\rho(r) = B(1 - \frac{r}{R})$  が存在する。ここで  $r$  は原点からの距離である。ただし,  $B$  は定数で,  $R < r$  では  $\rho(r) = 0$  である。
  - a. 半径  $r + \Delta r$  の球面と半径  $r$  の球面に挟まれた領域の体積  $\Delta V$  を求めよ。
  - b.  $\frac{\Delta r}{r} \ll 1$  とすると, 近似的に  $\Delta V$  は  $\Delta r$  に比例し,  $\Delta V = f(r)\Delta r$  と書ける。 $f(r)$  を求めよ。
  - c.  $\Delta V$  の領域内の質量は  $\rho(r)\Delta V = f(r)\rho(r)\Delta r$  となることから, 半径  $r$  の球面より内側に含まれる質量  $M(r)$  は,  $M(r) = \int_0^r f(r')\rho(r')dr'$  となる。  $r \leq R$  に対して,  $M(r)$  を求めよ。
  - d. 密度分布が球対称である場合には,  $r$  の位置にある質点を受ける単位質量あたりの重力の大きさ  $F_G$  は  $F_G(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$  となる。  $r \leq R$  と  $R < r$  のそれぞれについて,  $F_G(r)$  を求めよ。
  - e. 横軸を  $r$ , 縦軸を  $F_G(r)$  とするグラフの概形を描け。
  
3. 次のような行列  $C$  について考える。ここで  $i^2 = -1$  である。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

- a. 行列  $C$  の固有値をすべて求めよ。
- b. 行列  $C$  の固有ベクトルをすべて求めよ。ただし, 固有ベクトルは大きさ 1 に規格化すること。
- c. 行列  $C$  を対角化した行列を  $D$  とする。行列  $D$  を求めよ。
- d.  $D^n$  を計算し,  $C^n$  を求めよ。